BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO DẠNG φ-CO YẾU SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.32

Chủ nhiệm đề tài: Nguyễn Chí Tâm

Đồng Tháp, 4/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO DẠNG φ-CO YẾU SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.32

Xác nhận của Chủ tịch HĐ nghiệm thu **Chủ nhiệm đề tài**

Nguyễn Chí Tâm

Đồng Tháp, 4/2014

MỤC LỤC

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

TÓM TẮT KẾT QUẢ ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

Tên đề tài: Định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric

Mã số: CS2013.02.32

Chủ nhiệm đề tài: Nguyễn Chí Tâm

Tel.: 01677183683 E-mail: ck.tamsptoan@gmail.com

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Đồng Tháp

Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện: Không

Thời gian thực hiện: 5/2013 đến 4/2014

1. Mục tiêu: Thiết lập, chứng minh định lí điểm bất động và ví dụ đối với dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

2. Nội dung chính:

- Một số khái niệm và kiến thức chuẩn bị

- Định lí điểm bất động đối với dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

3. Kết quả chính đạt được (khoa học, ứng dụng, đào tạo, kinh tế - xã hội,...):

- Hệ thống những khái niệm, tính chất cơ bản về dạng φ-co yếu và không gian kiểu-mêtric.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric và xây dựng ví dụ minh hoạ.

- Một bài viết in trong Kỉ yếu Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp và một bản thảo bài báo khoa học đã gửi đăng.

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Chí Tâm

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

SUMMARY

Project Title: Fixed point theorems for generalized φ-weak contractions in metric type spaces.

Code number: CS2013.02.32

Coordinator: Nguyễn Chí Tâm

Tel.: 01677183683 E-mail: ck.tamsptoan@gmail.com

Implementing Institution: Dong Thap University

Cooperating Institution(s): No

Duration: from 2013, May to 2014, April

1. Objectives: To state and prove fixed point theorems and examples for generalized φ-weak contractions in metric type spaces.

2. Main contents:

- Preliminaries.

- Fixed point theorems for generalized φ-weak contractions in metric type spaces. Also, we give an example to illustrate the obtained result.

3. Results obtained:

- A review on basic notions, properties of φ-weak contractions and metric type spaces.

- To state and prove fixed point theorems for generalized φ-weak contractions in metric type spaces and construct an example to illustrate the obtained result.

- An article published in Proceeding of the 2013 Science Research Conference of Dong Thap Uiversity's students and a submitted manuscript.

Coordinator

Nguyễn Chí Tâm

MỞ ĐẦU

1 Tổng quan tình hình nghiên cứu

Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric đầy đủ là một kết quả nổi bật trong Giải tích. Kết quả này được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và mở rộng cho nhiều ánh xạ trên nhiều không gian khác nhau [3]. Năm 2009, trong [18], Q. Zhang và Y. Song đã mở rộng ánh xạ co thành dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian mêtric và đã chứng minh định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng này.

Tiếp đến năm 2010, trong [14], M. A. Khamsi đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng mới gọi là kiểu-mêtric và thiết lập được một số định lí về điểm bất động chung trong không gian này. Tuy nhiên, còn nhiều dạng định lí điểm bất động trong không gian mêtric chưa được thiết lập trong không gian kiểu-mêtric.

Ở trong nước, hướng nghiên cứu về định lí điểm bất động trên không gian mêtric suy rộng cũng được một số tác giả quan tâm nghiên cứu. Ở Trường Đại học Vinh, một số tác giả quan tâm đến một số dạng mở rộng cụ thể của định lí co. Năm 2012, K. P. Chi và các cộng sự đã chứng minh định lí điểm bất động cho các lớp ánh xạ thỏa mãn điều kiện co Ćirić trong [13]; thiết lập và chứng minh định lí co Meir-Keeler dựa trên các lớp ánh xạ T-co trong [5]. Ở Trường Đại học Đồng Tháp, một số tác giả quan tâm đến một số dạng định lí điểm bất động trên không gian mêtric và không gian mêtric suy rộng. Trong [2], N. V. Dung và các cộng sự đã chứng minh rằng không gian 2-mêtric là chính quy và trình bày mối quan hệ giữa hội tụ trong không gian 2-mêtric và không gian mêtric. Năm 2013, N. V. Dung [6] đã mở rộng kết quả của M. E. Gordji và các cộng sự trong [9]; N. T. Hieu và các cộng sự [11] đã mở rộng kết quả của E. Karapinar và các cộng sự trong [13]. Gần đây, trong [10], tác giả N. T. Hieu và V. T. L. Hang đã thiết lập và chứng minh được định lí điểm bất động kép cho ánh xạ α-ψ-co trong không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

Từ những vấn đề trên, chúng tôi đặt vấn đề mở rộng những kết quả đối với không gian mêtric trong [18] cho không gian kiểu-mêtric.

2 Tính cấp thiết của đề tài

Khi nghiên cứu về không gian kiểu-mêtric chúng tôi nhận thấy có nhiều định lí của không gian mêtric chưa được mở rộng vào không gian kiểu-mêtric, trong đó có định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng. Do đó, chúng tôi đặt vấn đề tương tự hoá những kết quả đối với dạng φ-co yếu suy rộng trên không gian mêtric trong [18] cho không gian kiểu-mêtric.

Việc nghiên cứu đề tài này sẽ góp phần giải quyết bài toán điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric. Qua đó, đề tài góp phần nâng cao chất lượng học tập và nghiên cứu các môn học Giải tích trong chương trình Đại học Sư phạm ngành toán.

3 Mục tiêu nghiên cứu

- Thiết lập, chứng minh định lí điểm bất động đối với dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

- Xây dựng ví dụ minh hoạ cho kết quả đạt được.

4 Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: thiết lập dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric từ dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian mêtric và sử dụng những kĩ thuật tương tự như trong không gian mêtric để chứng minh định lí điểm bất động trong không gian kiểu-mêtric.

Phương pháp: nghiên cứu tài liệu, bằng cách tương tự những kết quả đã có để đề xuất kết quả mới. Các kết quả này được thảo luận chi tiết với các tác giả cùng lĩnh vực nghiên cứu.

5 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

Đề tài thuộc lĩnh vực lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric suy rộng.

6 Nội dung nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric. Nội dung chính của đề tài được trình bày trong 2 chương

Chương 1: Trình bày những kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Trình bày định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric và áp dụng.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian mêtric

Trong mục này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản về dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian mêtric.

1.1.1 Định nghĩa ([8], trang 70)**.** Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. T được gọi là một *ánh xạ co* nếu tồn tại $k \in (0, 1)$ sao cho $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

1.1.2 Định nghĩa ([1])**.** Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. T được gọi là một *ánh xạ φ-co yếu* nếu tồn tại $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ sao cho $\varphi(t) > 0$ với mọi $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ và

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi\big(d(x, y)\big)$$

với mọi $x, y \in X$.

1.1.3 Nhận xét ([16])**.** Ánh xạ co là trường hợp đặc biệt của ánh xạ φ-co yếu với $\varphi(t) = (1 - k)t, t \geq 0, k \in (0, 1)$.

1.1.4 Định nghĩa ([15], Definition 7.0.1)**.** Giả sử (X, τ) là một không gian tôpô và $\varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là một ánh xạ. Khi đó φ được gọi là *nửa liên tục dưới* tại x_0 nếu với mỗi $\varphi(x_0) \in (r; +\infty)$ thì ảnh ngược của tập nửa mở $(r; +\infty)$ được chứa trong tập mở $U \in X$ chứa điểm x_0. Nghĩa là tồn tại tập mở $U \in \tau$ sao cho $x_0 \in U \subseteq \varphi^{-1}(r; +\infty)$, với mọi $\varphi(x_0) \in (r; +\infty)$.

Ánh xạ φ được gọi là *nửa liên tục dưới trên* X nếu như φ nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x_0 \in X$.

1.1.5 Bổ đề ([15], Proposition 7.1.1)**.** *Cho* (X, d) *là một không gian mêtric. Một hàm số* $\varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *là nửa liên tục dưới tại điểm* $x_0 \in X$ *nếu và chỉ nếu*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Theo [4, Định lí 4], ta có bổ đề sau:

1.1.6 Bổ đề. *Nếu* $\varphi : X \longrightarrow X$ *là một ánh xạ liên tục và* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

1.2 Không gian kiểu-mêtric

Trong mục này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản về không gian kiểu-mêtric được dùng trong đề tài.

1.2.1 Định nghĩa ([14], Definition 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

(2) $D(x, y) = D(y, x)$ với mọi $x, y \in X$,

(3) $D(x, z) \leq K\big[D(x, y_1) + \ldots + D(y_n, z)\big]$ với mọi $x, y_1, \ldots, y_n, z \in X$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

1.2.2 Nhận xét.

(1) (X, d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X, d, 1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

(2) Trong [12] các tác giả đã xét một không gian kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.2.1 được thay bởi điều kiện sau

$$D(x,z) \leq K\big[D(x,y) + D(y,z)\big] \text{ với mọi } x, y, z \in X.$$

1.2.3 Định nghĩa ([14], Definition 2.8)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X, D, K) là một dãy hội tụ.

1.2.4 Nhận xét. Trong không gian kiểu-mêtric, tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập A mở trong không gian kiểu-mêtric khi và chỉ khi với mỗi $x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, tồn tại n_0 sao cho $x_n \in A$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ là liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

1.2.5 Ví dụ. Xét $X = \{0, 1, 2\}$ và D xác định bởi

$$D(0,0) = D(1,1) = D(2,2) = 0, D(1,2) = D(2,1) = 4,$$

$$D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 1.$$

Khi đó (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ với $K = 2$.

Chứng minh. Với mọi $x, y \in X$, ta có

$D(x, y) \geq 0$,

$D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

$D(x, y) = D(y, x)$.

Với mọi $x, y_1, \ldots, y_k, y \in X$, ta cần chứng minh

$$D(x, y) \leq 2\big[D(x, y_1) + \ldots + D(y_k, y)\big]. \tag{1.1}$$

Chúng ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $D(x, y) = D(0, 1) = 1$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_k = 2$. Khi đó

$$D(0, 1) = 1 < 10 = 2[D(0, 2) + D(2, 1)].$$

Trường hợp 2. $D(x, y) = D(0, 2) = 1$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_k = 1$. Khi đó

$$D(0, 2) = 1 < 10 = 2[D(0, 1) + D(1, 2)].$$

Trường hợp 3. $D(x, y) = D(1, 2) = 4$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_k = 0$. Khi đó

$$D(1, 2) = 4 = 2[D(1, 0) + D(0, 2)].$$

Từ các trường hợp trên, chứng tỏ kết luận (1.1) là đúng. Vậy D là một kiểu-mêtric trên X với $K = 2$.

Mặt khác, giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong (X, D, K). Khi đó

$$\lim_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Do đó với $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ ta có $D(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$. Vậy $D(x_n, x_m) = 0$ với mọi $m, n \geq n_0$. Khi đó $x_n = x_m = x_{n_0}$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$. Vậy $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ.

Do đó (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ với $K = 2$. □

Trong [10], các tác giả đã chứng tỏ rằng kiểu-mêtric D trong Định nghĩa 1.2.1 là một ánh xạ không liên tục.

1.2.6 Ví dụ ([10], Example 2.1)**.** Cho $X = \big\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\big\}$ và $D : X \times X \longrightarrow [0; +\infty)$ xác định bởi

$$D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = y \\ 1 & \text{khi } x \neq y \text{ và } x, y \in \{0, 1\} \\ |x-y| & \text{khi } x, y \in \big\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}\big\}, m, n \geq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x \neq y \text{ và } x, y \in \big\{1, \frac{1}{n}\big\}, n \geq 2. \end{cases}$$

Khi đó D là một kiểu-mêtric không liên tục với $K = 3$.

Chứng minh. Với mọi $x, y \in X$, ta có

$D(x,y) \geq 0$,

$D(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

$D(x,y) = D(y,x)$.

Với mọi $x, y_1, \ldots, y_k, y \in X$, ta cần chứng minh

$$D(x,y) \leq 3\big[D(x,y_1) + \ldots + D(y_k,y)\big]. \tag{1.2}$$

Đặt

$$\sigma = D(x,y_1) + \ldots + D(y_k,y).$$

Chúng ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1. $D(x,y) = D(0,1) = 1$ hoặc $D(x,y) = D(1, \frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$ với $n \geq 2$. Khi đó $\sigma \geq \frac{1}{3}$.

Trường hợp 2. $D(x,y) = D(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ với $n \geq 2$. Nếu tồn tại $i \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho $y_i = 1$ thì $\sigma \geq \frac{1}{3}$ và nếu với mọi $i = 1, \ldots, k$ sao cho $y_i \neq 1$ thì $\sigma \geq \frac{1}{n}$.

Trường hợp 3. $D(x,y) = D(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$. Nếu tồn tại $i \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho $y_i = 1$ thì $\sigma \geq \frac{1}{3}$ và nếu với mọi $i = 1, \ldots, k$ sao cho $y_i \neq 1$ thì $\sigma \geq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$.

Từ các trường hợp trên, chứng tỏ kết luận (1.2) là đúng. Vậy D là một kiểu-mêtric trên X với $K = 3$.

Mặt khác, ta có

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Tuy nhiên

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}, 1\right) = \frac{1}{3} \neq 1 = D(0, 1).$$

Do đó D không liên tục. $\square$

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỐI VỚI DẠNG φ-CO YẾU SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC VÀ ÁP DỤNG

2.1 Định lí điểm bất động đối với dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric

Trong mục này, chúng tôi mở rộng định lí điểm bất động đối với ánh xạ φ-co yếu suy rộng trên không gian mêtric trong [18] sang ánh xạ φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

2.1.1 Bổ đề. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì điểm giới hạn của nó là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x và y trong X. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$0 \leq D(x, y) \leq K\big[D(x, x_n) + D(x_n, y)\big].$$

Cho $n \to \infty$ ta được $D(x, y) = 0$ hay $x = y$.

Vậy điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ là duy nhất. □

2.1.2 Định lí. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, D là một hàm liên tục và $T, S : X \longrightarrow X$ là hai ánh xạ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$D(Tx, Sy) \leq M(x, y) - \varphi\big(M(x, y)\big) \tag{2.1}$$

ở đây $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *là một hàm số nửa liên tục dưới, không giảm,* $\varphi(t) > 0$ *với mọi* $t \in (0, +\infty)$*,* $\varphi(0) = 0$ *và*

$$M(x, y) = \max\Big\{D(x, y), D(Tx, x), D(Sy, y), \frac{1}{2K}\big[D(y, Tx) + D(x, Sy)\big]\Big\}. \tag{2.2}$$

Khi đó S *và* T *có một điểm bất động chung duy nhất, nghĩa là tồn tại duy nhất một điểm* $u \in X$ *sao cho* $u = Tu = Su$.

Chứng minh. Trường hợp 1. Tồn tại x, y sao cho $M(x, y) = 0$. Khi đó $x = y$ là điểm bất động chung của T và S.

Thật vậy, vì $M(x, y) = 0$ và

$$D(x, y) \leq M(x, y),\ D(Tx, x) \leq M(x, y),\ D(Sy, y) \leq M(x, y),$$

nên $D(x, y) = D(Tx, x) = D(Sy, y) = 0$. Điều này có nghĩa là

$$x = y = Tx = Ty = Sx = Sy.$$

Trường hợp 2. Với mọi x, y ta có $M(x, y) > 0$.

Bước 1. Xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Lấy $x_0 \in X$, đặt $x_1 = Sx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Sx_2, \ldots$ Tiếp tục quá trình này ta chọn được $x_n \in X$ sao cho $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, x_{2n+1} = Sx_{2n}$ với mọi $n \geq 0$.

Giả sử n lẻ, từ (2.2) ta có

$$\begin{aligned}
D(x_{n+1}, x_n) &= D(Tx_n, Sx_{n-1}) \\
&\leq M(x_n, x_{n-1}) - \varphi\big(M(x_n, x_{n-1})\big) \\
&\leq M(x_n, x_{n-1}) \\
&= \max\Big\{D(x_n, x_{n-1}), D(x_{n+1}, x_n), D(x_n, x_{n-1}), \\
&\quad \frac{1}{2K}\big[D(x_{n-1}, x_{n+1}) + D(x_n, x_n)\big]\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max\Big\{D(x_n,x_{n-1}),D(x_{n+1},x_n),D(x_n,x_{n-1}),\\
&\quad \frac{1}{2K}\big[K\big(D(x_{n-1},x_n)+D(x_n,x_{n+1})\big)\big]\Big\}\\
&= \max\big\{D(x_{n+1},x_n),\mathrm{D}(x_n,x_{n-1})\big\}.
\end{aligned}
$$

Nếu tồn tại n lẻ sao cho $\max\big\{D(x_{n+1},x_n),\mathrm{D}(x_n,x_{n-1})\big\} = D(x_{n+1},x_n)$ thì $M(x_n,x_{n-1}) = D(x_{n+1},x_n) > 0$. Do đó

$$D(x_{n+1},x_n) \leq D(x_{n+1},x_n) - \varphi\big(D(x_{n+1},x_n)\big).$$

Điều này là vô lí. Vậy với mọi n lẻ , ta có

$$D(x_{n+1},x_n) \leq D(x_n,x_{n-1}). \tag{2.3}$$

Giả sử n chẵn, từ (2.2) ta có

$$
\begin{aligned}
D(x_n,x_{n+1}) &= D(Tx_{n-1},Sx_n)\\
&\leq M(x_{n-1},x_n) - \varphi\big(M(x_{n-1},x_n)\big)\\
&\leq M(x_{n-1},x_n)\\
&= \max\Big\{D(x_{n-1},x_n),D(x_n,x_{n-1}),D(x_{n+1},x_n),\\
&\quad \frac{1}{2K}\big[D(x_n,x_n)+D(x_{n-1},x_{n+1})\big]\Big\}\\
&\leq \max\Big\{D(x_{n-1},x_n),D(x_n,x_{n-1}),D(x_{n+1},x_n),\\
&\quad \frac{1}{2K}\big[K\big(D(x_{n-1},x_n)+D(x_n,x_{n+1})\big)\big]\Big\}\\
&= \max\big\{D(x_n,x_{n+1}),\mathrm{D}(x_{n-1},x_n)\big\}.
\end{aligned}
$$

Nếu tồn tại n chẵn sao cho $\max\big\{D(x_n,x_{n+1}),\mathrm{D}(x_{n-1},x_n)\big\} = D(x_n,x_{n+1})$ thì $M(x_{n-1},x_n) = D(x_n,x_{n+1}) > 0$. Do đó

$$D(x_n,x_{n+1}) \leq D(x_n,x_{n+1}) - \varphi\big(D(x_n,x_{n+1})\big).$$

Điều này là vô lí. Vậy với mọi n chẵn, ta có

$$D(x_n,x_{n+1}) \leq D(x_n,x_{n-1}). \tag{2.4}$$

Như vậy, từ (2.3) và (2.4) ta suy ra $\big\{D(x_{n+1}, x_n)\big\}$ là một dãy số thực không tăng và bị chặn dưới bởi 0. Vì thế tồn tại $r \geq 0$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n-1}) = r. \tag{2.5}$$

Vì φ là hàm nửa liên tục dưới nên ta có $\varphi(r) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \varphi\big(M(x_n, x_{n-1})\big)$. Lưu ý rằng, với mọi n ta có

$$D(x_{n+1}, x_n) \leq M(x_n, x_{n-1}) - \varphi\big(M(x_n, x_{n-1})\big). \tag{2.6}$$

Lấy giới hạn dưới khi $n \to \infty$ trong (2.6) và sử dụng (2.5) ta có

$$r \leq r - \liminf_{n\to\infty} \varphi\big(M(x_n, x_{n-1})\big) \leq r - \varphi(r).$$

Vậy $\varphi(r) \leq 0$ hay $\varphi(r) = 0$. Suy ra $r = 0$. Từ đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, x_{n+1}) = r = 0.$$

Bước 2: Chứng minh dãy lặp $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Đặt $c_n = \sup\big\{D(x_j, x_k) : j, k \geq n\big\}$. Khi đó $\{c_n\}$ là một dãy không tăng.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\big\{D(x_j, x_k) : j, k \geq n\big\} = 0$. Nói cách khác, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $\sup\big\{D(x_j, x_k) : j, k \geq n\big\} < \varepsilon$. Vậy $D(x_j, x_k) < \varepsilon$ với mọi $j, k \geq n$. Chọn $n = n_0$, khi đó với mọi $j, k \geq n_0$ thì $D(x_j, x_k) < \varepsilon$. Điều này có nghĩa $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c > 0$. Chọn $\varepsilon < \dfrac{c}{6}$, khi đó tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$D(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon \text{ và } c_n < c + \varepsilon. \tag{2.7}$$

Vì $c_{N+1} = \sup\{D(x_m, x_n) : m, n \geq N + 1\}$ nên tồn tại $m, n \geq N + 1$ sao cho

$$D(x_m, x_n) > c_{N+1} - \varepsilon \geq c - \varepsilon. \tag{2.8}$$

Điều này kéo theo

$$D(x_{m-1}, x_{n-1}) \geq \frac{1}{K}\big[D(x_m, x_n) - D(x_n, x_{n-1}) - D(x_m, x_{m-1})\big] \geq \frac{c - 3\varepsilon}{K}. \tag{2.9}$$

Mặt khác, từ (2.2) ta có

$$D(x_m, x_n) = D(Tx_{m-1}, Sx_{n-1}) \leq M(x_{m-1}, x_{n-1}) - \varphi\big(M(x_{m-1}, x_{n-1})\big). \tag{2.10}$$

Áp dụng (2.9) và $\varepsilon < \dfrac{c}{6}$ ta suy ra

$$\begin{aligned} M(x_{m-1}, x_{n-1}) &= \max\Big\{D(x_{m-1}, x_{n-1}), D(x_m, x_{m-1}), D(x_n, x_{n-1}), \\ &\qquad \frac{1}{2K}\big[D(x_{n-1}, x_m) + D(x_{m-1}, x_n)\big]\Big\} \\ &\geq D(x_{m-1}, x_{n-1}) \\ &\geq \frac{c - 3\varepsilon}{K} \\ &\geq \frac{c}{2K}. \end{aligned}$$

Vì $M(x_{m-1}, x_{n-1}) \geq \dfrac{c}{2K}$ và φ là một hàm không giảm nên

$$\varphi\big(M(x_{m-1}, x_{n-1})\big) \geq \varphi\Big(\frac{c}{2K}\Big).$$

Mặt khác, với $m, n \geq N + 1$ thì $M(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq c_N$. Do đó, theo (2.10) ta có $D(x_m, x_n) \leq c_N - \varphi(\dfrac{c}{2K})$ với mọi $m, n \geq N + 1$. Từ đó suy ra

$$c_{N+1} < c_N - \varphi(\frac{c}{2K}). \tag{2.11}$$

Từ (2.7), (2.8) và (2.11) ta có $c - \varepsilon < c + \varepsilon - \varphi(\dfrac{c}{2K})$. Cho $\varepsilon \to 0^+$ ta suy ra $c \leq c - \varphi(\dfrac{c}{2K})$. Điều này là vô lí vì $c > 0$.

Vậy $c = 0$, nghĩa là $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Bước 3. Chứng minh dãy Cauchy $\{x_n\}$ hội tụ về điểm bất động chung của T và S.

Vì X là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ nên tồn tại $u \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = u$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = u$.

Tiếp theo, ta chứng minh $u = Tu = Su$. Thật vậy, giả sử $u \neq Tu$, khi đó $D(u, Tu) > 0$. Suy ra tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n > N_1$, ta có

$$D(x_{2n+1}, u) \leq \frac{1}{2}D(u, Tu), \qquad D(x_{2n}, u) \leq \frac{1}{2}D(u, Tu),$$

$$D(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq \frac{1}{2}D(u, Tu).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
& D(u, Tu) \\
\leq\ & M\big(u, x_{2n}\big) \\
=\ & \max\Big\{D(u, x_{2n}), D(u, Tu), D(x_{2n+1}, x_{2n}), \frac{1}{2K}\big[D(u, x_{2n+1}) + D(x_{2n}, Tu)\big]\Big\} \\
\leq\ & \max\Big\{D(u, x_{2n}), D(u, Tu), D(x_{2n+1}, x_{2n}), \\
& \frac{1}{2K}\Big[D(u, x_{2n+1}) + K\big(D(x_{2n}, u) + D(u, Tu)\big)\Big]\Big\} \\
\leq\ & \max\Big\{\frac{1}{2}D(u, Tu), D(u, Tu), \frac{1}{2}D(u, Tu), \frac{1}{2K}\big[\frac{1}{2}D(u, Tu) + \frac{3K}{2}D(u, Tu)\big]\Big\} \\
=\ & D(u, Tu).
\end{aligned}$$

Vậy $M(u, x_{2n}) = D(u, Tu)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
D(Tu, x_{2n+1}) &= D(Tu, Sx_{2n}) \\
&\leq M(u, x_{2n}) - \varphi\big(M(u, x_{2n})\big) \\
&= D(u, Tu) - \varphi\big(D(u, Tu)\big).
\end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ ta được $D(Tu, u) \leq D(Tu, u) - \varphi\big(D(Tu, u)\big)$. Điều này là mâu thuẫn với $D(u, Tu) > 0$. Vậy $u = Tu$.

Ta lại có

$$\begin{aligned}
D(u, Su) &= D(Tu, Su) \\
&\leq M(u, u) - \varphi\big(M(u, u)\big) \\
&= D(u, Su) - \varphi\big(D(u, Su)\big).
\end{aligned}$$

Từ đó $D(u, Su) = 0$ hay $u = Tu = Su$.

Như vậy, từ Trường hợp 1 và Trường hợp 2 ta suy ra S và T có điểm bất động chung.

Cuối cùng, ta chứng minh tính duy nhất của điểm bất động chung của S và T. Giả sử tồn tại v sao cho $v = Tv = Sv$. Ta có

$$\begin{aligned} D(u,v) &= D(Tu,Sv) \\ &\leq M(u,v) - \varphi\big(M(u,v)\big) \\ &= D(u,v) - \varphi\big(D(u,v)\big). \end{aligned}$$

Suy ra $D(u,v) = 0$. Vậy $u = v$. □

2.2 Áp dụng

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một số hệ quả của Định lí 2.1.2 và xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

2.2.1 Hệ quả. *Cho (X,d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T,S : X \longrightarrow X$ là hai ánh xạ sao cho với mọi $x,y \in X$,*

$$d(Tx,Sy) \leq M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big),$$

ở đây $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ là một hàm số nửa liên tục dưới, không giảm, $\varphi(t) > 0$ với mọi $t \in (0,+\infty)$, $\varphi(0) = 0$ và

$$M(x,y) = \max\Big\{d(x,y), d(Tx,x), d(Sy,y), \frac{1}{2}\big[d(y,Tx) + d(x,Sy)\big]\Big\}.$$

Khi đó S và T có một điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Hệ quả có được bằng cách thay $K = 1$ trong Định lí 2.1.2. □

Lưu ý rằng Hệ quả 2.2.1 tương tự như [18, Theorem 2.1] ngoại trừ giả thiết không giảm của φ. Tuy nhiên, trong chứng minh của [18, Theorem 2.1] ở trang 77, từ $M(x_{m-1}, x_{n-1}) \geq \dfrac{c}{2}$. Các tác giả suy ra

$$\varphi\big(M(x_{m-1}, x_{n-1})\big) \geq \varphi\big(\frac{c}{2}\big).$$

Điều này là chưa hợp lí.

2.2.2 Hệ quả. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, D là một hàm liên tục và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$D(Tx, Ty) \leq M(x, y) - \varphi\big(M(x, y)\big),$$

ở đây $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ là một hàm số nửa liên tục dưới, không giảm, $\varphi(t) > 0$ với mọi $t \in (0, +\infty)$, $\varphi(0) = 0$ và

$$M(x, y) = \max\Big\{D(x, y), D(Tx, x), D(Ty, y), \frac{1}{2K}\big[D(y, Tx) + D(x, Ty)\big]\Big\}.$$

Khi đó T có điểm bất động duy nhất, nghĩa là tồn tại duy nhất một điểm $u \in X$ sao cho $u = Tu$.

Chứng minh. Hệ quả có được bằng cách thay $S = T$ trong Định lí 2.1.2. $\square$

2.2.3 Ví dụ ([18], Example 2.3)**.** Cho $X = [0, 1]$ và đặt $d(x, y) = |x - y|$ với mọi $x, y \in X$. Cho $Tx = \frac{1}{3}x^2$ và $Sx = 0$ với mọi $x \in X$.

Khi đó $d(Tx, Sy) = \frac{1}{3}x^2$ và

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \max\left\{|x - y|, \left|\frac{1}{3}x^2 - x\right|, |-y|, \frac{1}{2}\left(\left|y - \frac{1}{3}x^2\right| + |x|\right)\right\} \\ &= \max\left\{|x - y|, x - \frac{1}{3}x^2, y, \frac{1}{2}\left(x + \left|y - \frac{1}{3}x^2\right|\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $0 \leq y \leq \frac{1}{3}x^2$. Khi đó

$$M(x, y) = \max\left\{|x - y|, x - \frac{1}{3}x^2, y, \frac{1}{2}\left(x + \left|y - \frac{1}{3}x^2\right|\right)\right\} = x - y.$$

Trường hợp 2. $y \geq x - \frac{1}{3}x^2$. Khi đó

$$M(x, y) = \max\left\{|x - y|, x - \frac{1}{3}x^2, y, \frac{1}{2}\left(x + \left|y - \frac{1}{3}x^2\right|\right)\right\} = y.$$

Trường hợp 3. $\frac{1}{3}x^2 < y < x - \frac{1}{3}x^2$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\left\{|x-y|, x - \frac{1}{3}x^2, y, \frac{1}{2}\left(x + \left|y - \frac{1}{3}x^2\right|\right)\right\} = x - \frac{1}{3}x^2.$$

Vậy $M(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{khi} \quad 0 \le y \le \frac{1}{3}x^2 \\ x - \frac{1}{3}x^2 & \text{khi} \quad \frac{1}{3}x^2 < y < x - \frac{1}{3}x^2 \\ y & \text{khi} \quad x - \frac{1}{3}x^2 \le y. \end{cases}$

Xét hàm số $\varphi(t) = \frac{1}{6}t$ với mọi $t \in [0, +\infty)$. Khi đó ta có

$$d(Tx, Sy) \le M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big)$$

với mọi $x, y \in X$.

Đồng thời, các giả thiết còn lại trong Hệ quả 2.2.1 đều thỏa mãn. Do đó Hệ quả 2.2.1 áp dụng được cho S và T trên (X, d).

Lưu ý rằng trong tài liệu [18] các tác giả đã tính giá trị

$$M(x,y) = \frac{1}{2}\big(x + y - \frac{1}{3}x^2\big) \ \text{ khi } \ x - \frac{1}{3}x^2 \le y.$$

Tuy nhiên kết quả này là chưa chính xác. Kết quả đúng phải là

$$M(x,y) = y \ \text{ khi } \ x - \frac{1}{3}x^2 \le y.$$

2.2.4 Ví dụ. Xét $X = \{0, 1, 2\}$ và D xác định bởi

$$D(0,0) = D(1,1) = D(2,2) = 0, D(1,2) = D(2,1) = 4,$$

$$D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 1.$$

Theo Ví dụ 1.2.5 thì khi đó (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ với $K = 2$.

Xét hai ánh xạ $T, S : X \longrightarrow X$ xác định bởi

$$T0 = T1 = T2 = 0, S0 = 0, S1 = 2, S2 = 1.$$

Khi đó $D(Tx, Sy) = D(0, Sy) = \begin{cases} 0 \text{ khi } y = 0 \\ 1 \text{ khi } y \neq 0 \end{cases}$ và

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \max\Big\{D(x,y), D(Tx,x), D(Sy,y), \frac{1}{4}\big[D(y,Tx) + D(x,Sy)\big]\Big\} \\ &= \max\Big\{D(x,y), D(0,x), D(Sy,y), \frac{1}{4}\big[D(y,0) + D(x,Sy)\big]\Big\}. \end{aligned}$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x = y = 0$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(0,0), D(0,0), D(0,0), \frac{1}{4}\big[D(0,0) + D(0,0)\big]\Big\} = 0.$$

Trường hợp 2. $x = 0, y = 1$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(0,1), D(0,0), D(2,1), \frac{1}{4}\big[D(1,0) + D(0,2)\big]\Big\} = 4.$$

Trường hợp 3. $x = 0, y = 2$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(0,2), D(0,0), D(1,2), \frac{1}{4}\big[D(2,0) + D(0,1)\big]\Big\} = 4.$$

Trường hợp 4. $x = 1, y = 0$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(1,0), D(0,1), D(2,0), \frac{1}{4}\big[D(0,0) + D(1,0)\big]\Big\} = 1.$$

Trường hợp 5. $x = y = 1$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(1,1), D(0,1), D(2,1), \frac{1}{4}\big[D(1,0) + D(1,2)\big]\Big\} = 4.$$

Trường hợp 6. $x = 1, y = 2$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(1,2), D(0,1), D(1,2), \frac{1}{4}\big[D(2,0) + D(1,1)\big]\Big\} = 4.$$

Trường hợp 7. $x = 2, y = 0$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(2,0), D(0,2), D(1,0), \frac{1}{4}\big[D(0,0) + D(2,1)\big]\Big\} = 1.$$

Trường hợp 8. $x = 2, y = 1$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(2,1), D(0,2), D(2,1), \frac{1}{4}\big[D(1,0) + D(2,2)\big]\Big\} = 4.$$

Trường hợp 9. $x = y = 2$. Khi đó

$$M(x,y) = \max\Big\{D(2,2), D(0,2), D(1,2), \frac{1}{4}\big[D(2,0) + D(2,1)\big]\Big\} = 4.$$

Vậy $M(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ khi } x = y = 0 \\ 1 \text{ khi } y = 0, x \neq 0 \\ 4 \text{ khi } y \neq 0, x \in X. \end{cases}$

Xét hàm số $\varphi(t) = \dfrac{1}{6}t$, với mọi $t \in [0, +\infty)$. Khi đó ta có

$$D(Tx, Sy) \leq M(x,y) - \varphi\big(M(x,y)\big).$$

Đồng thời, các giả thiết còn lại trong Định lí 2.1.2 đều thỏa mãn. Do đó Định lí 2.1.2 áp dụng được cho S và T trên (X, D, K). Mặc khác, vì

$$D(2,1) = 4 > D(2,0) + D(0,2) = 1 + 1 = 2$$

nên D không là một mêtric trên X. Do đó Hệ quả 2.2.1 không áp dụng được cho S và T trên (X, D).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Đề tài đã đạt được những kết quả sau:

- Hệ thống những khái niệm, tính chất cơ bản về dạng φ-co yếu và không gian kiểu-mêtric.

- Thiết lập, chứng minh định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric và xây dựng ví dụ minh hoạ: Định lí 2.1.2, Hệ quả 2.2.1, Hệ quả 2.2.2, Ví dụ 2.2.4.

Các kết quả trên đã được trình bày trong Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp [17] và một bản thảo bài báo khoa học đã gửi đăng [7].

2 Kiến nghị

Đề tài có thể được phát triển theo những hướng sau:

- Trình bày ví dụ chứng tỏ nếu bỏ đi giả thiết "không giảm" trong Định lí 2.1.2 thì kết luận không còn đúng nữa.

- Mở rộng Định lí 2.1.2 bằng việc bổ sung thêm một số giá trị mới vào điều kiện co.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y. I. Alber and S. Guerre-Delabriere, *Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces*, Adv. Appl. **98** (1997), 7 – 22.

[2] T. V. An, N. V. Dung, and N. T. Hieu, *Further results on 2-metric spaces*, J. Sci. Vinh Univ. **41** (2012), no. 3A, 1 – 10.

[3] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, 2004.

[4] Đ. T. Cấp, *Tôpô đại cương*, NXB Giáo dục, Tp Hồ Chí Minh, 2005.

[5] K. P. Chi, E. Karapinar, and T. D. Thanh, *A generalization of the Meir-Keeler type contraction*, Arab J. Math. Sci. **18** (2012), 141 – 148.

[6] N. V. Dung, *On coupled common fixed points for mixed weakly monotone maps in partially ordered S-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2013:48** (2013), 1 – 24.

[7] N. V. Dũng và N. C. Tâm, *Điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, (2014), bài gửi đăng.

[8] N. Định và N. Hoàng, *Hàm số biến số thực*, NXB Giáo dục, 2003.

[9] M. E. Gordji, M. Ramezani, Y. J. Cho and E. Akbartabar, *Coupled common fixed point for mixed weakly monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2012:95** (2012), 1 – 25.

[10] N. T. Hieu and V. T. L. Hang, *Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ-contractive mappings in partially ordered metric-type spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim. (2014), submitted.

[11] N. T. Hieu, N. T. T. Ly, and N. V. Dung, *A generalization of Ćirić quasi-contractions for maps on S-metric spaces*, Thai J. Math. (2014), in press.

[12] M. Jovanovic, Z. Kadelburg, and S. Radenovic, *Common fixed point results in metric-type spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010), 1 – 15.

[13] E. Karapinar, K. P. Chi, and T. D. Thanh, *A generalization of Ćirić quasicontractions*, Abstr. Appl. Anal. **2012** (2012), 1 – 9.

[14] M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010), 1 – 7.

[15] A. J. Kurdila and M. Zabarankin, *Convex functional analysis*, Springer, 2005, 205 – 206.

[16] B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal. **47** (2001) 2683 – 2693.

[17] N. C. Tâm và N. V. Dũng, *Kỷ yếu hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013 - lĩnh vực khoa học tự nhiên*, Trường Đại học Đồng Tháp (2013), 48 – 54.

[18] Q. Zhang and Y. Song, *Fixed point theory for generalized φ-weak contractions*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 75 – 78.

PHỤ LỤC

1. N. V. Dũng và N. C. Tâm, *Điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, (2014), bài gửi đăng.
2. N. C. Tâm và N. V. Dũng, *Kỷ yếu hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013 - lĩnh vực khoa học tự nhiên*, Trường Đại học Đồng Tháp (2013), 48 – 54.